Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

RM
2022-2023

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Groupe linéaire d'un espace vectoriel

1.1 Premières propriétés

Définition 1 : On définie $GL(E)$ appelé groupe linéaire de E l'ensemble des automorphismes de E. On définit $Gl_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2 : On a enfaite un isomorphisme de groupe entre $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$. Il est alors commode d'étudier l'un des ensemble pour mieux comprendre l'autre.

Théorème 3 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $u \in GL(E)$.
2) $\ker(u) = \{0\}$.
3) $Im(u) = E$.
4) $rg(u) = n$.
5) $\det(u) \neq 0$.
6) L'image d'une base par u est encore une base.
7) Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id$.
8) Il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = Id$.

Exemple 4 : Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie $u : x \mapsto \lambda x$ est un élément de $GL(E)$.

1.2 Déterminant et groupe spécial linéaire

Proposition 5 : L'application det : $GL(E) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupe surjectif.

Définition 6 : On appelle alors groupe spécial linéaire noté $SL(E)$ le noyau de l'application det, ie $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) | \det(u) = 1\}$. On a de même $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) | \det(A) = 1\}$.

Proposition 7 : On a que $SL(E)$ est un sous-groupe distinguée dans $GL(E)$ isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$. On a de plus que le groupe quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

Théorème 8 : On a $Z(GL(E)) = \mathbb{K}^*.Id$ et $Z(SL(E)) = \mu_n(\mathbb{K}).Id$, où $\mu_n(\mathbb{K})$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{K}^*$.

1.3 Application aux endomorphismes nilpotents

Lemme 9 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $Tr(u^k) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n = dim(E)$.

Développement (théorème de Burnside) : ***10 :*** Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $A^N = I$ pour toute matrice A du groupe). Alors G est fini. **Dev 1**

2 Étude de GL(E)

2.1 Transvections et dilatations

Définition 11 : Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a$ où $a \in \ker(\varphi)$. On notera $\tau_{\varphi,a}$ une telle transvection.

Théorème 12 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non trivial. Alors sont équivalents :

i) u est une transvection.

ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) il existe une base dans laquelle la matrice de u est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

iv) $rg(u - Id) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $(X-1)^n$.

Remarque 13 : On en déduit que une transvection est dans $SL(E)$.

Théorème 14 : L'inverse d'une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, 1 est l'unique valeur propre de $\tau_{varphi,a}$ et l'espace propre associé est $\ker(\varphi)$ si elle n'est pas trivial.
Le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.

Corollaire 15 : Pour $n \geq 3$, toutes les transvections différentes de Id sont conjuguées dans $SL(E)$.

Définition 16 : Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle dilatation d'hyperplan $ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(x) = x + \phi(x)$ pour tout x dans E et $a \in E \setminus ker(\varphi)$. On note $\delta_{\varphi,a}$ une telle dilatation.

Théorème 17 : Une dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est dans $GL(E)$ si et seulement si $\lambda = 1+\varphi(a) \neq 0$.

On appelle alors λ le rapport de dilatation.

Théorème 18 : Pour $u \in GL(E)$, sont équivalents :
$i)$ u est une dilatation de rapport λ.
$ii)$ Il existe une base de E dans laquelle u est de la forme $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{n,n}$ avec $\lambda = det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

Remarque 19 : On a alors que une dilatation dans $GL(E)$ n'est jamais dans $SL(E)$.

Théorème 20 : Le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport et l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $1/\lambda$.

2.2 Générateurs de SL(E) et GL(E)

Lemme 21 : Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $a \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$.
1) L'ensemble $H = (H_1 \cap H_2) \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E.
2) On a $E = H + H_1 = H + H_2$.
3) Il existe une transvection u telle que $u(H_1) = H_2$.

Lemme 22 : Pour tous x, y non nuls dans E, il existe $u \in SL(E)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u(x)$.

Théorème 23 : • Les transvections engendrent $SL(E)$.
• Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

2.3 Cas des corps finis

Soit $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments avec $q = p^r$ où p premier et $r \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 24 : Pour tout $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, on a :
$card(GL(E)) = \prod_{k=1}^{n}(q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)$.
$card(SL(E)) = q^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1}(q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n}(q^k - 1)$.

Proposition 25 : L'ensemble $T_n(\mathbb{F}_p)$ constitué des matrices triangulaires supérieures de termes diagonaux tous égaux à 1 apour cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. C'est un p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Application (Théorème de Sylow) 26 : Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 1$ et p premier ne divisant pas m, il existe alors un p-sous-groupe de Sylow de G.

3 Action sur les espaces de matrices et pivot de Gauss

Définition 27 : L'application $(P, A) \in GL_n(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \mapsto P.A = PA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ définit une action de $Gl_n(\mathbb{K})$ sur $M_{n,m}(\mathbb{K})$ (action de translation à gauche) et deux matrices sont dans la même orbites si et seulement si elles ont le même noyau.

Remarque 28 : On peut définir de même la translation à droite avec $P.A = AP^{-1}$.

Définition 29 : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ avec $i \neq j$, on appelle matrice de transvection une matrice carré de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ et matrice de dilatation une matrice carré de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

Proposition 30 : • La multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ.
• La multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.
• La multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ.
• La multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.
Ces opérations sont appelés opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

Théorème 31 : Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que la matrice PA soit échelonnée en lignes. Cette matrice PA est donc dans l'orbite de A pour l'action par translation à gauche.

Théorème 32 : Une opération sur un système élémentaire sur les lignes d'un système linéaire $AX = b$ le transforme en un système équivalent.

Remarque 33 : On vient donc ici de revoir la méthode pour un résoudre un système linéaire et l'existence la matrice échelonnée, l'algorithme trouvant cette matrice est appelé pivot de Gauss et est en $O(n^3)$.

4 Groupe orthogonal et topologie de GL(E)

4.1 Groupe orthogonal

Définition 34 : Une isométrie (ou application orthogonale) de E est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y de E. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Exemple 35 : • Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries sont Id et $-Id$.

• Pour E de dimension 1, on a $\mathcal{O}(E) = \{-Id, Id\}$.

Théorème 36 : Une application $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle conserve la norme, ie $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Remarque 37 : La linéarité est importante. Par exemple, si $e \in E$ de norme 1, l'application $u : x \mapsto \|x\|e$ conserve la norme et n'est pas linéaire.

Théorème 38 : Une isométrie est un automorphisme de E et $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Théorème 39 : Soit u une isométrie de E. Si F est un s.e.v de E stable par u, alors son orthogonale $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

Théorème 40 : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est une isométrie si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Théorème 41 : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et u dans $\mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$. L'application u est une isométrie si et seulement si on a ${}^tAA = A^tA = I_n$.

Définition 42 : On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A telle que ${}^tAA = A^tA = I_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Théorème 43 : • Pour toute matrice A dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = +_-1$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

• Pour toute isométrie $u \in \mathcal{O}(E)$, on a $\det(u) = +_-1$.

Définition 44 : On note $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | \det(u) = 1\}$ l'ensemble des isométries positives et $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | \det(u) = -1\}$ l'ensemble des isométries négatives.

Théorème 45 : Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$.

4.2 Topologie de GL(E)

Proposition 46 : Les groupes $SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Proposition 47 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc. Ces composantes connexes sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ ou $GL_n^-(\mathbb{R})$, les ensembles des matrices de déterminant > 0 ou < 0 respectivement.

Proposition 48 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Développement (Décomposition polaire) : 49 : L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme

Dev 2

Références :

1. Algèbre et géométrie Rombaldi
2. Algèbre linéaire Grifone
3. Oraux X-ENS algèbre tome 2
4. H2G2 Caldero